

ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОБЕСПЕЧЕНИЯ НАДЕЖНОСТИ И КАЧЕСТВА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

УДК 004.896(075.8)

DOI 10.21685/2307-4205-2017-1-9

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ЛОКАЛИЗАЦИИ КОРНЕЙ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ, ОСНОВАННОГО НА ПРИНЦИПЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ РАЗРЕШИМОСТИ

Н. Н. Керимбай, Д. С. Ергалиев, А. Б. Нысанбаева,
Г. Н. Керимбай, Н. Н. Сергазы

Введение

Системы автоматического управления (САУ) в настоящее время широко используются в разнообразных областях – для управления космическими и другими подвижными объектами (в том числе и военного назначения), для управления сложными технологическими процессами в различных отраслях народно-хозяйственной деятельности и т.д., можно отметить также широкое использование САУ для управления бытовой техникой (пылесосы, холодильники и т.д.).

Накопленный к настоящему времени богатый опыт создания подобного рода систем свидетельствует о том, что эффективные САУ могут быть созданы лишь при активном использовании теории автоматического управления (ТАУ).

Разработанные к концу 80-х гг. XX столетия усилиями зарубежных и отечественных ученых методы ТАУ позволяли исследовать процессы и синтезировать управляющие устройства для широкого класса сравнительно несложных систем управления. В то же время с конца 70-х гг. XX столетия объектом особенно пристального внимания разработчиков становятся так называемые сложные технические системы. Эти системы состоят из большого числа динамически взаимодействующих элементов и описываются математическими моделями большой размерности. В качестве примеров таких систем можно привести:

- 1) сложные объекты с распределенными параметрами, для управления которыми используется распределенное управление (задачи управления плазменными установками различного назначения и т.д.);
- 2) экономические и экологические системы, для которых особенно остро стоят проблемы обеспечения управляемого поведения в условиях негативного влияния глобализации;
- 3) сложные энергетические сети, в которых происходят аварии, связанные с неправильным расчетом режимов работы сложных энергетических сетей;
- 4) сложные электромеханические системы (многозвенные роботы-манипуляторы и транспортные роботы, управляемые конструкции космических станций и т.д.).

Все перечисленные примеры объединяет то, что для описания процессов в таких системах приходится использовать аппарат систем обыкновенных дифференциальных уравнений (СДУ) большой размерности (десятки, сотни и даже тысячи).

Последний пример систем играет особую роль в развитии научно-технического прогресса и их удобно объединить в единый класс многосвязных мехатронных систем. В состав таких систем входит большое число механически взаимосвязанных элементов, для управляемого перемещения которых достаточно часто используются различные приводы. Перечислим несколько примеров многосвязных мехатронных систем:

1. Манипуляционные и транспортные роботы. Это наиболее распространенный на практике класс многосвязных мехатронных систем. Известно, что использование промышленных роботов дает значительный эффект в машиностроении, микроэлектронике. В 1980–90-х гг. появляются примеры непромышленного применения манипуляционных роботов (медицина, чрезвычайные ситуации, космос).

Транспортные роботы также достаточно используются в промышленном производстве (транспортирование заготовок и готовой продукции) и разнообразных непромышленных областях (медицина, чрезвычайные ситуации, космос и т.д.).

2. Мехатронные системы с параллельной кинематикой.

3. Реконфигурируемые мехатронные системы. В ряде стран ведутся работы по созданию многосвязных мехатронно-модульных роботов с адаптивной кинематической структурой. Использование типовых мехатронных модулей позволяет создавать различные по структуре механизмы, обладающие очень важными достоинствами по сравнению с механизмами с фиксированной кинематикой: многофункциональностью; повышенной проходимостью и реализуемостью сложных движений; высокой надежностью.

4. Большие космические конструкции (БКК). БКК представляют собой соединение большого числа механических тел, являющихся каркасом той или иной конструкции, например, системы солнечных батарей, больших радиотелескопов и высокочувствительных телескопов миллиметрового, субмиллиметрового и инфракрасного диапазонов.

Резкий прорыв в последние годы в развитии нано- и микротехнологий позволяет создавать новые типы сенсорных и исполнительных элементов различного назначения. Все это является предпосылкой к созданию нового поколения многосвязных мехатронных систем различного назначения, состоящих из большого числа динамически взаимодействующих элементов (модулей).

Прогресс в создании и разработке новых типов многосвязных мехатронных систем в значительной мере определяется возможностями методов исследования процессов и синтеза управляющих устройств таких систем. Существующие методы, как правило, не позволяют подходить комплексно к решению проблем, связанных со всем многообразием задач, необходимых для анализа и синтеза систем управления многосвязных мехатронных систем. Поэтому крайне актуальной является задача создания новых и модернизации существующих методов исследования подобных систем.

Цель и задачи работы заключаются в развитии метода локализации корней алгебраических уравнений, основанного на принципе вычислительной разрешимости.

Для решения задач построения областей, в которых локализуются корни алгебраических уравнений [1], возможно использование нескольких методов.

1. *Метод квадрирования исходного алгебраического уравнения.*

При использовании этого метода происходит процесс «разведения» корней уравнения с последующим вычислением оценок для корней уравнения. Эффективность использования этого метода для определения области локализации корней существенным образом зависит от наличия априорной информации о структуре решения.

2. *Использование метода Бернулли.* При этом методе [2] строится конечно-разностное уравнение, определяемое исходным алгебраическим уравнением, и вычисляется бесконечная последовательность решений конечно-разностного уравнения. При этом если отношение двух членов последовательности имеет предел, то этот предел является оценкой максимального по модулю корня алгебраического уравнения. Этот метод может быть использован для нахождения оценки для минимального по модулю корня алгебраического уравнения, а также существует модификация метода для случая комплексных корней. Как и в случае метода квадрирования, эффективность использования метода Бернулли существенным образом зависит от наличия априорной информации о структуре решения.

3. *Метод рядов Лагранжа – Бюрмана.* С идейной точки зрения этот метод [3] схож с методом Бернулли. Исходному алгебраическому уравнению ставится в соответствие бесконечный ряд, который при определенных соотношениях между коэффициентами алгебраического уравнения может обладать свойством сходимости, при этом можно получить оценки для границ локализации корней. Использование этого метода для определения области локализации корней для произвольных алгебраических уравнений в настоящее время представляется проблематичным.

4. *Методы локализации для различных случаев априорной информации о корнях алгебраических уравнений.* В работах [3] систематизированы результаты, позволяющие получить оценки для локализации корней полинома $f(x)$, если известна локализация корней полинома $g(x)$, тем или иным образом связанного полиномом $f(x)$. Таковы теоремы Грейса о корнях аполярных полиномов, Гаусса – Люка, Йенсена, Сендова – Илиева о корнях $f(x)$ и $f'(x)$ и т.д. В тоже время нам неизвестны работы, в которых исследовалась бы возможность использования подобных результатов для отыскания корней уравнений.

5. *Метод классических оценок в виде кругового кольца на комплексной плоскости.* В этом случае рассматриваются оценки для минимального $r_{\min}$ и максимального $r_{\max}$ значений модулей корней уравнений, восходящих к работам О. Коши [4]. Область локализации корней в этом случае представляется в виде кругового кольца на комплексной плоскости с радиусами $r_{\min}$ и $r_{\max}$.

6. *Метод неклассических оценок в виде кругового кольца на комплексной плоскости, полученных на основе теорем о границах локализации собственных чисел матриц с комплексными элементами.* Этот подход обладает большей общностью, чем метод, описанный в п. 5; при этом удастся не только получать оценки для значений $r_{\min}$ и $r_{\max}$ кругового кольца, но и построить более детальную картину области, в которой располагаются собственные значения матрицы [5]. Важно отметить, что задача построения границ локализации корней исходного алгебраического уравнения сводится к эквивалентной задаче нахождения области локализации собственных значений сопровождающей матрицы уравнения.

7. *Метод локализации, основанный на использовании принципа вычислительной разрешимости алгебраических уравнений.* Этот метод представляет определенную ценность, поскольку позволяет находить корни уравнений с приемлемой для практики точностью без использования итеративных алгоритмов [6].

В данной работе используются методы локализации корней, отмеченные в пп. 5, 6, 7 по следующей причине – методы классических и неклассических оценок (пп. 5 и 6) позволяют получать оценки для области локализации всех классов полиномов, при этом их вычислительная сложность сравнительно небольшая. Методы, описанные в пп. 1–4, позволяют получать более точные оценки локализации корней для частных классов уравнений, однако при этом может быть затрачен больший вычислительный ресурс.

Для достижения цели нашей работы мы провели анализ и применение метода локализации, основанный на использовании принципа вычислительной разрешимости алгебраических уравнений.

Проблема перечисления классов разрешимых уравнений для произвольной степени уравнений, основанная на концепции Абеля – Галуа, не имеет решения, по крайней мере, в настоящее время.

Поэтому задача данной работы изучить класс уравнений над полем действительных или комплексных чисел, которые обладают следующим свойством – для нахождения решений уравнения требуется конечное число арифметических и радикальных операций. Будем называть *такие уравнения разрешимыми в вычислительном отношении* [6–9].

Новизна данной работы в том, что на базе принципа вычислительной разрешимости предложен метод локализации кратных корней алгебраических уравнений, дающий существенно более точные оценки для расположения кратных корней по сравнению с оценками, полученными для случая отсутствия априорной информации о расположении корней.

Методология и алгоритм работы

Рассмотрим алгебраическое уравнение n -степени над полем комплексных или действительных чисел

$$F(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (1)$$

Нас будет интересовать в основном поле действительных чисел, поэтому в соответствии с теоремой Гаусса о корнях такого уравнения будет справедливой запись

$$F(x) = \prod_{i=1}^k (x + a_i) \cdot \prod_{j=1}^m (x^2 + p_j x + q_j). \quad (2)$$

В (2) используются следующие обозначения: a_i – совокупность действительных корней уравнения (1), $(i = \overline{1, k})$; p_j, q_j – совокупность коэффициентов квадратного трехчлена, определяющая сопряженные комплексные корни уравнения $(j = \overline{1, k})$; $i + 2m = n$.

Рассмотрим различные случаи.

Случай 1. Пусть уравнение (1) имеет единственный действительный корень α кратности n . Тогда выражение (2) принимает вид

$$F(x) = (x + \alpha)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} \alpha + C_n^2 x^{n-2} \alpha^2 + \dots + C_n^{n-2} x^2 \alpha^{n-2} + C_n^{n-1} x \alpha^{n-1} + \alpha^n = 0. \quad (3)$$

В выражении (3) используется положительное значение α . Это используется для более простой формы выражения, при практическом использовании учитывается знак корней.

Сравним коэффициенты при одинаковых степенях x выражений (1) и (3) и запишем

$$\begin{aligned} \alpha^n &= a_n, \\ C_n^{n-1} \alpha^{n-1} &= a_{n-1}, \\ C_n^{n-1} \alpha^{n-2} &= a_{n-2}, \\ C_n^2 \alpha^2 &= a_2, \\ C_n^1 \alpha &= a_1. \end{aligned} \quad (4)$$

Рассмотрим следующий вычислительный алгоритм, состоящий из n -этапов.

1-й этап. Вычисляем $\sqrt[n]{a_n}$ и присваиваем его α , т.е. $\alpha = \sqrt[n]{a_n}$. Переходим к следующему этапу.

2-й этап. Проверяем справедливость равенства $a_{n-1} = C_n^{n-1} \alpha^{n-1}$, и если оно имеет место, то переходим к следующему этапу; в противном случае вычислительный алгоритм завершается.

3-й этап. Проверяем справедливость равенства $a_{n-2} = C_n^{n-2} \alpha^{n-2}$ и далее, как в п. 2 и т.д.

На последнем n этапе проверяется справедливость равенства $a_1 = C_n^1 \alpha$.

Таким образом, в случае выполнения всех n этапов алгоритма мы можем прийти к выводу, что наше исходное алгебраическое уравнение имеет единственный корень α кратности n . Заметить, что для этого нам потребовались только те операции, которые необходимы для разрешимости алгебраического уравнения в радикалах в классической постановке задачи. Эффективность этого алгоритма очевидна, особенно по сравнению с итеративными алгоритмами решения уравнений.

Случай 2. Пусть уравнение (1) имеет различные действительные корни α и β кратности m и k соответственно, причем $m + k = n$. Тогда можно записать

$$F(x) = (x + \alpha)^m (x + \beta)^k = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0. \quad (5)$$

Раскроем левую часть уравнения (5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях переменной x , причем выпишем лишь следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^m \beta^k; \\ a_{n-1} &= (C_k^{k-1} \alpha^m \beta^{k-1} + C_m^{m-1} \alpha^{m-1} \beta^k); \\ a_2 &= (C_m^2 \alpha^2 + C_m^1 C_k^1 \alpha \beta + C_k^2 \beta^2); \\ a_1 &= (C_m^1 \alpha + C_k^1 \beta). \end{aligned} \quad (6)$$

Нетрудно видеть, что (6) представляет собой систему из четырех нелинейных уравнений относительно двух действительных переменных α и β и двух целых положительных переменных

m и k , стесненных условием $m + k = n$. Пусть α, β, m, k есть решение системы уравнений (6). Тогда для проверки справедливости первоначального предположения о том, что исходное уравнение имеет действительные корни α и β кратности m и k соответственно, необходимо проверить справедливость ровно $(n - 4)$ равенств, аналогичных описанным в п. 1, и которые здесь не приведены.

Разумеется, в данном случае мы выходим за рамки рациональных и радикальных операций, характерных для классической задачи о разрешимости уравнений, но описанный алгоритм имеет большую эффективность при отыскании кратных корней уравнений по сравнению с классическими итеративными алгоритмами.

Следует заметить, что представленная схема нахождения решения предполагает вычисления с высокой точностью.

Рассмотренный способ нахождения решения алгебраических уравнений, основанный на использовании понятия вычислительной разрешимости, может быть распространен и на другие случаи – действительные корни кратности, большей или равной трем, кратные комплексные корни различной размерности. Следует, правда, заметить, что сложность алгоритмов при этом увеличивается. Мы не будем приводить здесь соответствующие выражения для этих случаев, лишь подчеркнем, что использование подобного подхода, основанного на понятии вычислительной разрешимости уравнений, представляется крайне перспективным, поскольку позволяет построить новый класс вычислительных алгоритмов, имеющих атрибуты интеллектуальности. На необходимость построения подобных алгоритмов указывали еще такие признанные авторитеты, как Дж. Х. Уилкинсон [7] и Дж. Трауб [8], полагавшие, что такие алгоритмы будут иметь большую эффективность по сравнению с чисто вычислительными версиями.

Описанный способ нахождения решений уравнений может быть использован для очень узкого класса уравнений, имеющих кратные корни. Однако этот класс уравнений чрезвычайно сложно решать с использованием численных методов в силу плохой обусловленности [9].

Представленная схема нахождения решения уравнений с кратными корнями может быть использована и для определения области локализации подобных уравнений.

Будем полагать, что уравнение $F(x) = x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a^n = 0$ имеет единственный действительный корень кратности n . Пусть некоторые из коэффициентов этого уравнения подверглись малым возмущениям.

Тогда рассмотрим следующий алгоритм:

1-й этап. Вычисляем $\sqrt[n]{a_n}$ и присваиваем его α , т.е. $\alpha = \sqrt[n]{a_n}$.

2-й этап. Проверяем справедливость неравенства $|a_{n-1} - C_n^{n-1}\alpha^{n-1}| \leq \varepsilon$, где ε – произвольное положительное число; если оно имеет место, то переходим к следующему этапу, в противном случае вычислительный алгоритм завершается.

3-й этап. Проверяем справедливость неравенства $|a_{n-2} - C_n^{n-2}\alpha^{n-2}| \leq \varepsilon$ и далее, как в п. 2 и т.д.

На последнем этапе проверяется справедливость равенства $|a_1 - C_n^1\alpha| \leq \varepsilon$, т.е. записывается в виде

$$\begin{aligned} \alpha^n &= a^n; \\ |a_{n-1} - C_n^{n-1}\alpha^{n-1}| &< \varepsilon; \\ |a_{n-2} - C_n^{n-2}\alpha^{n-2}| &< \varepsilon; \\ |a_2 - C_n^2\alpha^2| &< \varepsilon; \\ |a_1 - C_n^1\alpha| &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{7}$$

Если все $n - 1$ этапов рассмотренного алгоритма завершились успешно, то будем полагать, что все корни алгебраического уравнения x_i удовлетворяют неравенству

$$|\alpha - x_i| \leq \delta(\epsilon), \quad (8)$$

где $\delta(\epsilon)$ – положительное число, зависящее от ϵ .

Последнее выражение для $\delta(\epsilon)$ определяет более точную границу области локализации корней уравнений по сравнению с известными. В этом случае будем полагать, что корни лежат внутри окружности радиуса $\delta(\epsilon)$ с центром в α . Тогда $r_{\max} = \delta(\epsilon)$, а $r_{\min} = 0$.

Заключение

В данной работе на основе сформулированного принципа вычислительной разрешимости алгебраических уравнение предложен метод точной локализации кратных корней уравнений. Принципиальной особенностью этого метода является то, что он позволяет находить корни уравнения с приемлемой для практики точностью без использования итеративных алгоритмов [10].

Использование принципа вычислительной разрешимости позволяет не только находить решение алгебраических уравнений без использования итеративных алгоритмов, но и может быть использован для более точной локализации корней уравнений с кратными корнями.

Библиографический список

1. Уилкинсон, Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. – М. : Наука, Гл. ред. Физ.-мат. лит, 1970. – 273 с.
2. Демидович, Б. П. Основы вычислительной математики / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит, 1966. – 179 с.
3. Прасолов, В. В. Многочлены / В. В. Прасолов. – М. : МЦИМО, 2003. – 253 с.
4. Marden, M. The Geometry of the Zeros of a Polynomial in a Complex Variable / M. Marden. – New York : AMS, 1949. – 235 p.
5. Mignotte, M. Mathematics for computer algebra / M. Mignotte. – New York : Springer-Verlag, 1992. – 168 с.
6. Тягунов, О. А. Развитие технологий прямых корневых методов в задачах исследования систем управления / О. А. Тягунов // Информационно-измерительные и управляющие системы. – 2008. – Т. 6, № 6. – С. 43–48.
7. Уилкинсон, Дж. Х. Алгебраическая проблема собственных значений / Дж. Х. Уилкинсон. – М. : Наука, Гл. ред. Физ.-мат. лит, 1970. – 187 с.
8. Трауб, Д. Итерационные методы решения уравнений / Д. Трауб. – М. : МИР, 1985. – 254 с.
9. Исследование программных пакетов моделирования влияния электромагнитных воздействий на изделия радиоэлектронных средств / С. А. Бростилов, Т. Ю. Бростилова, Н. К. Юрков, Н. В. Горячев, В. А. Трусов, В. Я. Баннов, А. О. Бекбаулиев // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. – 2015. – Т. 1. – С. 206–209.
10. Кочегаров, И. И. Исследование влияния отверстий на собственные частоты пластинчатой конструкции / И. И. Кочегаров, С. И. Торгашин, А. В. Фомичев, А. В. Ляшенко // Труды Международного симпозиума Надежность и качество. – 2015. – Т. 2. – С. 297–298.

Керимбай Нуржан Нурбергенович

кандидат технических наук, профессор,
кафедра космической техники и технологий,
Евразийский Национальный университет
им. Л. Н. Гумилева
(010000, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2)
E-mail: n.kerimbay@mail.ru

Ергалиев Дастан Сырымович

кандидат технических наук, доцент,
заведующий кафедрой космической техники
и технологий,
Евразийский Национальный университет
им. Л. Н. Гумилева
(010000, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2)
E-mail: DES-67@yandex.kz

Kerimbay Nurzhan Nurbergenovich

candidate of technical sciences, professor,
sub-department of space engineering and technology,
Eurasian National University
named after L. N. Gumilyov
(010000, 2 Satpaeva street, Astana, Kazakhstan)

Ergaliev Dastan Syrymovich

candidate of technical sciences, associate professor,
head of sub-department of space engineering
and technology,
Eurasian National University
named after L. N. Gumilyov
(010000, 2 Satpaeva street, Astana, Kazakhstan)

Нысанбаева Акбота Болатбековна

магистрант,
Евразийский Национальный университет
им. Л. Н. Гумилева
(010000, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2)
E-mail: nasanbaeva@mail.ru

Керимбай Гульжан Нуржановна

магистрант,
Евразийский Национальный университет
им. Л. Н. Гумилева
(010000, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2)
E-mail: k.gulzhan94@mail.ru

Сергазы Нурсултан Нургазиевич

магистрант,
Евразийский Национальный университет
им. Л. Н. Гумилева
(010000, Казахстан, г. Астана, ул. Сатпаева, 2)
E-mail: sergazi@mail.ru

Nysanbaeva Akbota Bolatbekovna

master degree student,
Eurasian National University
named after L. N. Gumilyov
(010000, 2 Satpaeva street, Astana, Kazakhstan)

Kerimbay Gul'zhan Nurzhanovna

master degree student,
Eurasian National University
named after L. N. Gumilyov
(010000, 2 Satpaeva street, Astana, Kazakhstan)

Sergazy Nursultan Nurgazievich

master degree student,
Eurasian National University
named after L. N. Gumilyov
(010000, 2 Satpaeva street, Astana, Kazakhstan)

Аннотация. Настоящая работа посвящена решению задачи развития технологии анализа динамических свойств многосвязных мехатронных систем (ММС) высокой размерности. Для этого наиболее перспективно использовать методы нахождения корней характеристического уравнения системы. Можно выделить две ключевые проблемы, от решения которых существенным образом зависит решение поставленной задачи анализа ММС. Первая проблема связана с построением границ расположения (локализации) корней характеристического уравнения систем управления. Вторая проблема посвящена разработке стратегий выбора начальных приближений для группы итеративных методов решения алгебраических уравнений [1].

Ключевые слова: многосвязные мехатронные системы, системы автоматического управления, манипуляционные и транспортные роботы, методы локализации корней, принцип вычислительной разрешимости.

Abstract. The present work is devoted to solving the problem of development of the technology of analysis of dynamic properties of multiply connected mechatronic systems (MMS) of high dimension. To do this, it is most promising to use methods for finding the roots of the characteristic equation of the system. Two key problems can be identified, from the solution of which the decision of the task of analyzing MMCs depends substantially. The first problem is related to the construction of the boundaries of the location (localization) of the roots of the characteristic equation of control systems. The second problem is devoted to the development of strategies for choosing initial approximations for a group of iterative methods for solving algebraic equations [1].

Key words: multiply connected mechatronic systems, automatic control systems, manipulation and transport robots, methods of root localization, the principle of computational solvability.

УДК 004.896(075.8)

Развитие метода локализации корней алгебраических уравнений, основанный на принципе вычислительной разрешимости / Н. Н. Керимбай, Д. С. Ергалиев, А. Б. Нысанбаева, Г. Н. Керимбай, Н. Н. Сергазы // Надежность и качество сложных систем. – 2017. – № 1 (17). – С. 70–76. DOI 10.21685/2307-4205-2017-1-9.